

上海交通大学试卷（期中卷）

（2023 至 2024 学年 第 2 学期）

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 《高等数学》A类 _____ 成绩 _____

一、单项选择题（每题3分，共15分）

1. 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} dx dy$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} dx dy$, $I_3 = \iiint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} dx dy$,

且 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$, 则 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$; (B) $I_1 < I_3 < I_2$;

(C) $I_2 < I_3 < I_1$; (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

2. 设 $f(t)$ 连续, 令 $F(x, y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)f(t)dt$, 则 ()

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; (B) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$;

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; (D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3. 设 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ()

(A) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都存在; (B) $f_x(0, 0)$ 存在, $f_y(0, 0)$ 不存在;

(C) $f_x(0, 0)$ 不存在, $f_y(0, 0)$ 存在; (D) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 都不存在。

4. 设二元函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有定义, $g(t) = f(t, t)$,

I. 若 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可偏导, 则 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导;

II. 若 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微, 则 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可微;

III. 若 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数, 则 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上导函数连续。

上述命题正确的个数为 ()

(A) 0个; (B) 1个; (C) 2个; (D) 3个。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：_____

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

5. 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 等于 ()

(A) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}$;

(B) $\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}$;

(C) $\int_0^1 dy \int_0^y \frac{dx}{(1+x)(1+y^2)}$;

(D) $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{dx}{(1+x)(1+y^2)}$ 。

二、填空题（每题3分，共15分）

6. 设三元函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ，则函数的微分 $du|_{(2,1,2)} =$ _____。

7. 曲面 $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$ 在 $(u, v) = (1, 2)$ 处的切平面方程为：_____。

8. 设隐函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x - y, y - z, z - x) = 0$ 所确定，则 $z_x + z_y =$ _____。

9. 交换 $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-y} f dz$ 的积分次序为先关于 x 再关于 y 最后关于 z ：_____。

10. 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，则 $\iint_D \frac{x^4 + 2y^4 + 3}{x^4 + y^4 + 2} dx dy =$ _____。

三、讨论二重极限（本题8分）

11. 讨论二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^3 y + xy^3}$ ，计算该极限或证明极限不存在。

四、计算极值（本大题共18分，第12题8分，第13题10分）

12. 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + x^2y^2 + y \ln y$ 的极值。

13. 设函数 $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy$ ，在曲线 $C: 2x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 3y + 10 = 0$ 上，求函数 $f(x, y)$ 的所有方向导数的最大值与最小值。

五、重积分应用（本大题共18分，第14题8分，第15题10分）

14. 求三个柱面 $x = 2z^2$, $y = z^2$, $x + 2y = 1$ 所围的立体体积。

15. 求抛物面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 位于 $y \geq 0$ 的部分，被柱面 $y = x$, $y = -x$, $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 所截部分的曲面面积。

六、解答题（本大题共18分，第16题、第17题各9分）

16. 设 $z = z(x, y)$ 具二阶连续偏导数，且满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + g(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ，若方程在变换 $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$ 下不含 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ 项，求函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 以及变换后的新方程。

17. 设立体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ，其第一卦限部分密度为 2ρ ，第二、三、四卦限部分密度为 ρ ，若其下半空间部分密度为常数，且质心位于 xOy 平面，求立体 Ω 质心的坐标。

七、证明题（本题8分）

18. 已知反常积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 与 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ 均收敛,

设 $C_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $D_r = \{(x, y) | |x| \leq r, |y| \leq r\}$ ($r > 0$), 判断等式:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{C_r} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{r \rightarrow +\infty} \iint_{D_r} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

是否成立? 并给出相应的证明。